



MINISTERUL
EDUCAȚIEI



Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală, Județul Dolj, 17 februarie 2024
Clasa a-VII-a

SUBIECTUL 1.

Fie numărul $n = \frac{\sqrt{70+30\sqrt{5}}}{8\sqrt{7+3\sqrt{5}}} \cdot (\sqrt{7-3\sqrt{5}} - \sqrt{7+3\sqrt{5}})$

- a) Stabiliți dacă numărul n este număr rațional;
- b) Găsiți $[n]$ și $\{n\}$, unde $[n]$ reprezintă partea întreagă a lui n și $\{n\}$ partea fracționară a lui n , adică $\{n\} = n - [n]$.

SUBIECTUL 2.

- a) Arătați că pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ are loc:
 $|x - y|^2 + |x + y|^2 = 2(|x|^2 + |y|^2)$;
- b) Arătați că pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ are loc:
 $|x + y| + |x - y| = |x| + |y| + ||x| - |y||$.

SUBIECTUL 3.

Considerăm pătratul $ABCD$, punctul T interior acestuia, astfel încât triunghiul ADT este echilateral. În exteriorul pătratului construim triunghiul echilateral ABE și triunghiul echilateral EDF , astfel încât punctul B este situat în interiorul triunghiului EDF .

- a) Arătați că punctele C, T, E – coliniare;
- b) Determinați măsura unghiului $(\sphericalangle BFE)$.

SUBIECTUL 4.

Fie $ABCD$ un paralelogram cu $AC \cap BD = \{O\}$ și punctele $M \in (AB)$, $N \in (BC)$. Punctele P și Q sunt simetricele punctului O față de punctele M , respectiv N . Știind că punctele P și Q aparțin dreptelor AD , respectiv CD , demonstrați că:

- a) O este centrul de greutate al triunghiului DPQ ;
- b) $OPBQ$ este paralelogram;
- c) $BP = BQ$ dacă și numai dacă $ABCD$ este romb.

Gazeta Matematică 10/2023

*Notă: Toate subiectele sunt obligatorii
Fiecare problemă se va nota de la 0 la 7 puncte
Timp de lucru 3 ore*



MINISTERUL
EDUCAȚIEI



Barem de notare și evaluare
Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Locală, Județul Dolj, 17 februarie 2024

clasa a VII a

Subiectul 1.	
a) $\sqrt{70 + 30\sqrt{5}} = 5 + 3\sqrt{5}$	1p
$8\sqrt{7 + 3\sqrt{5}} = 4(3\sqrt{2} + \sqrt{10})$	1p
$\sqrt{7 - 3\sqrt{5}} - \sqrt{7 + 3\sqrt{5}} = \left(-\frac{\sqrt{10}}{2}\right).$	1p
$\frac{\sqrt{70+30\sqrt{5}}}{8\sqrt{7+3\sqrt{5}}} \cdot (\sqrt{7 - 3\sqrt{5}} - \sqrt{7 + 3\sqrt{5}}) = -\frac{5+3\sqrt{5}}{4(3\sqrt{2}+\sqrt{10})} \cdot \sqrt{10}$	1p
$-\frac{5+3\sqrt{5}}{4(3\sqrt{2}+\sqrt{10})} \cdot \sqrt{10} = -\frac{5 \cdot (5+3\sqrt{5})}{4 \cdot (3+\sqrt{5})} = -\frac{5}{4} \in \mathbb{Q}.$	1p
b) $[n] = \left[-\frac{5}{4}\right] = \left[-1\frac{1}{4}\right] = -2$	1p
$\{n\} = \left\{-1\frac{1}{4}\right\} = -1\frac{1}{4} - (-2) = \frac{3}{4}.$	1p
TOTAL	7p
Subiectul 2	
a) Folosind relația $ x ^2 = x^2 \Rightarrow$	
$ x - y ^2 + x + y ^2 = x^2 - 2xy + y^2 + x^2 + 2xy + y^2 = 2x^2 + 2y^2$	1p
$2(x ^2 + y ^2) = 2(x^2 + y^2) = 2x^2 + 2y^2$	
Finalizare : $ x - y ^2 + x + y ^2 = 2(x ^2 + y ^2)$	1p
b) Ridicând la pătrat obșinem: $ x + y + x - y = x + y + x - y \uparrow^2$	1p
$(x + y + x - y)^2 = [(x + y) + x - y]^2 \xleftrightarrow{ x ^2=x^2} x^2 + y^2 + 2xy + x^2 + y^2 - 2xy + 2 x^2 - y^2 = x^2 + y^2 + 2 xy + x^2 + y^2 - 2 xy + 2 x^2 - y^2 $	3p
Finalizare: $2 x^2 - y^2 = 2 x^2 - y^2 $	1p
TOTAL	7p

Subiectul 3

<p>a) $\triangle DTC$ – isoscel $\Rightarrow m(\angle CTD) = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ$</p> <p>$\triangle ATE$ – isoscel $\Rightarrow m(\angle ATE) = \frac{180^\circ - (30^\circ + 60^\circ)}{2} = 45^\circ$</p> <p>Astfel $m(\angle ETC) = 180^\circ \Rightarrow C, T, E$ – coliniare</p>	<p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p>
<p>b) $\left. \begin{array}{l} \triangle ADE \\ \triangle CDF \end{array} \right \begin{array}{l} DA = DC \\ ED = FD \\ \angle EDA = \angle FDC = 15^\circ \end{array} \left \begin{array}{l} L.U.L. \\ \Rightarrow \triangle ADE \equiv \triangle CDF \end{array} \right.$</p> <p>Rezultă astfel $FC = AE$ și $m(\angle DCF) = 150^\circ \Rightarrow \angle FCB = 60^\circ$</p> <p>Dar $\triangle FBC$ – isoscel $\Rightarrow \triangle FBC$ – echilateral $\Rightarrow FB = BE \Rightarrow \triangle EBF$ – isoscel \Rightarrow</p> <p>$m(\angle EBF) = 150^\circ \Rightarrow m(\angle BFE) = 15^\circ$</p>	<p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p>
<p>TOTAL</p>	<p>7p</p>
<h3>Subiectul 4</h3>	
<p>a) Fie $PO \cap DQ = \{R\}, OQ \cap AD = \{S\}$.</p> <p>$\triangle OMA \equiv \triangle OBC, \triangle ONC \equiv \triangle OSA, \triangle ORS \equiv \triangle OMN \Rightarrow$</p> <p>$OR = \frac{1}{2}PO, OS = \frac{1}{2}OQ, MN \equiv RS.$</p> <p>$MN \parallel RS \Rightarrow RS \parallel PQ$ și $RS = \frac{PQ}{2}.$</p> <p>în $\triangle DPQ \Rightarrow \left. \begin{array}{l} R - \text{mij. } (DQ) \\ S - \text{mij. } (PD) \end{array} \right\} \Rightarrow O - \text{c. g. } \triangle DPQ$</p>	<p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p>
<p>b) Fie $DO \cap PQ = \{T\}$</p> <p>$O - \text{c. g. } \triangle DPQ, OT = \frac{OD}{2} = \frac{OB}{2} = TB, \text{ dar } TQ = TP \Rightarrow OPBQ \text{ paralelogram}$</p>	<p>1p</p>
<p>c) "\Rightarrow"</p> <p>$BP \equiv BQ \Rightarrow PBQO$ – romb $\Rightarrow \angle OTQ = 90^\circ, DT$ – mediană $\Rightarrow \triangle DPQ$ – is.</p> <p>$\triangle APB \equiv \triangle CQB \Rightarrow AP \equiv CQ \Rightarrow DA \equiv DC \Rightarrow ABCD$ – romb.</p> <p>"\Leftarrow"</p> <p>DT – mediană, DT – bisectoarea $\angle PDQ \Rightarrow \triangle DPQ$ – isoscel $\Rightarrow DB \perp PQ$</p> <p>$\Rightarrow OB \perp PQ$, dar $OBQO$ – paralelogram $\Rightarrow OBQO$ – romb $\Rightarrow BP \equiv BQ$</p>	<p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p>
<p>TOTAL</p>	<p>7p</p>



MINISTERUL
EDUCAȚIEI



SUBIECTUL 1.(soluție completă)

Fie numărul $n = \frac{\sqrt{70+30\sqrt{5}}}{8\sqrt{7+3\sqrt{5}}} \cdot (\sqrt{7-3\sqrt{5}} - \sqrt{7+3\sqrt{5}})$

a) Stabiliți dacă numărul n este număr rațional;

b) Găsiți $[n]$ și $\{n\}$, unde $[n]$ reprezintă partea întreagă a lui n și $\{n\}$ partea fracționară a lui n , adică $\{n\} = n - [n]$.

Soluție.

a) Folosind formula radicalilor compuși găsim: $\sqrt{70+30\sqrt{5}} = 5 + 3\sqrt{5}$,
 $8\sqrt{7+3\sqrt{5}} = 4(3\sqrt{2} + \sqrt{10})$ și

$$\sqrt{7-3\sqrt{5}} - \sqrt{7+3\sqrt{5}} = \left(-\frac{\sqrt{10}}{2}\right).$$

Astfel:

$$\frac{\sqrt{70+30\sqrt{5}}}{8\sqrt{7+3\sqrt{5}}} \cdot (\sqrt{7-3\sqrt{5}} - \sqrt{7+3\sqrt{5}}) = -\frac{5+3\sqrt{5}}{4(3\sqrt{2}+\sqrt{10})} \cdot \sqrt{10} = -\frac{5 \cdot (5+3\sqrt{5})}{4 \cdot (3+\sqrt{5})} = -\frac{5}{4} \in \mathbb{Q}.$$

$$b) [n] = \left[-\frac{5}{4}\right] = \left[-1\frac{1}{4}\right] = -2; \{n\} = \left\{-1\frac{1}{4}\right\} = -1\frac{1}{4} - (-2) = \frac{3}{4}.$$



MINISTERUL
EDUCAȚIEI



SUBIECTUL 2 (soluție completă)

a) Arătați că pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ are loc:

$$|x - y|^2 + |x + y|^2 = 2(|x|^2 + |y|^2);$$

b) Arătați că pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ are loc:

$$|x + y| + |x - y| = |x| + |y| + ||x| - |y||.$$

Soluție.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad |x|^2 = x^2 &\Rightarrow \begin{aligned} |x - y|^2 &= (x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 \\ |x + y|^2 &= (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \end{aligned} \\ &\Rightarrow |x - y|^2 + |x + y|^2 = x^2 - 2xy + y^2 + x^2 + 2xy + y^2 = 2x^2 + 2y^2 \\ 2(|x|^2 + |y|^2) &= 2(x^2 + y^2) = 2x^2 + 2y^2 \\ &\Rightarrow |x - y|^2 + |x + y|^2 = 2(|x|^2 + |y|^2). \end{aligned}$$

b) Avem echivalențele:

$$|x + y| + |x - y| = |x| + |y| + ||x| - |y|| \uparrow^2$$

Ridicăm ambii membri la pătrat \Rightarrow

$$\begin{aligned} (|x + y| + |x - y|)^2 &= [(|x| + |y|) + ||x| - |y||]^2 \Rightarrow |x + y|^2 + |x - y|^2 + 2|x + y| \cdot |x - y| = \\ &(|x| + |y|)^2 + ||x| - |y||^2 + 2[(|x| + |y|) \cdot ||x| - |y||] \xrightarrow{|x|^2 = x^2} x^2 + y^2 + 2xy + x^2 + y^2 - \\ &2xy + 2|x^2 - y^2| = x^2 + y^2 + 2|xy| + x^2 + y^2 - 2|xy| + 2|x^2 - y^2| \Leftrightarrow 2|x^2 - y^2| = \\ &2|x^2 - y^2| - \text{egalitate adevărată.} \end{aligned}$$

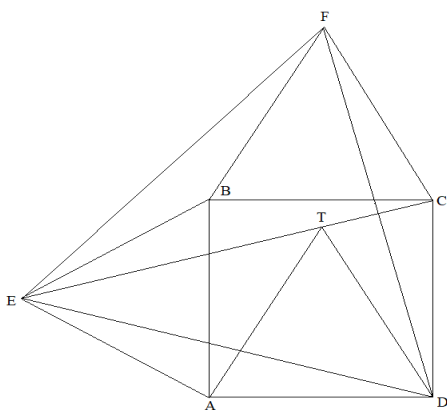
SUBIECTUL 3.(soluție completă)

Considerăm pătratul $ABCD$, punctul T interior acestuia, astfel încât triunghiul ADT echilateral. În exteriorul pătratului construim triunghiul echilateral ABE și triunghiul echilateral EDF , astfel încât punctul B este situat în interiorul triunghiului EDF .

a) Arătați că punctele C, T, E – coliniare;

b) Determinați măsura unghiului ($\angle BFE$).

Soluție.



a) Unind punctele C, T și T, E , observăm că $\triangle DTC$ – isoscel, pentru că $DT = DC$ și $\triangle ATE$ – isoscel, pentru că $TA = EA$. Astfel găsim :

$$m(\angle CTD) = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ$$

$$m(\angle ATE) = \frac{180^\circ - (30^\circ + 60^\circ)}{2} = 45^\circ$$

Astfel $m(\angle ETC) = m(\angle ETA) + m(\angle ATD) + m(\angle DTC) = 45^\circ + 60^\circ + 75^\circ = 180^\circ \Rightarrow C, T, E$ – coliniare.

$$b) \begin{array}{l} \triangle ADE \\ \triangle CDF \end{array} \left| \begin{array}{l} DA = DC \\ ED = FD \end{array} \right. \text{ (deoarece } \triangle FED \text{ – echilateral)} \left| \begin{array}{l} L.U.L. \\ \Rightarrow \end{array} \right. \begin{array}{l} \angle EDA = \angle FDC = 15^\circ \end{array}$$

$$\triangle ADE \equiv \triangle CDF$$

Rezultă astfel $FC = AE$ și $m(\angle DCF) = 150^\circ \Rightarrow \angle FCB = 60^\circ$

Dar $\triangle FBC$ – isoscel $\Rightarrow \triangle FBC$ – echilateral $\Rightarrow FB = BE \Rightarrow \triangle EBF$ – isoscel \Rightarrow

$$m(\angle EBF) = 150^\circ \Rightarrow m(\angle BFE) = 15^\circ .$$

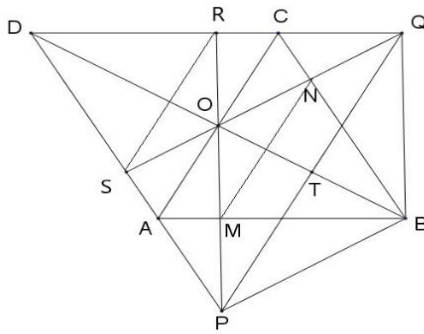


SUBIECTUL 4.(soluție completă)

Fie $ABCD$ un paralelogram cu $AC \cap BD = \{O\}$ și punctele $M \in (AB)$, $N \in (BC)$. Punctele P și Q sunt simetricele punctului O față de punctele M , respectiv N . Știind că punctele P și Q aparțin dreptelor AD , respectiv CD , demonstrați că:

- a) O este centrul de greutate al triunghiului DPQ ;
- b) $OPBQ$ este paralelogram;
- c) $BP = BQ$ dacă și numai dacă $ABCD$ este romb.

Soluție:



- a) Fie $PO \cap DQ = \{R\}$, $OQ \cap AD = \{S\}$. Comparăm $\triangle OMA$ cu $\triangle OBC$:

$$\left. \begin{array}{l} OA \equiv OC \\ \sphericalangle AOM \equiv \sphericalangle ROC \\ \sphericalangle OAM \equiv \sphericalangle OCR \end{array} \right\} \xrightarrow{U.L.U.} \triangle OMA \equiv \triangle ORC \Rightarrow OR \equiv OM \Rightarrow OR = \frac{1}{2} PO$$

Comparăm $\triangle ONC$ cu $\triangle OSA$:

$$\left. \begin{array}{l} OA \equiv OC \\ \sphericalangle AOS \equiv \sphericalangle CON \\ \sphericalangle SAO \equiv \sphericalangle OCN \end{array} \right\} \xrightarrow{U.L.U.} \triangle ONC \equiv \triangle OSA \Rightarrow OS \equiv ON \Rightarrow OS = \frac{1}{2} OQ$$

Comparăm $\triangle ORS$ cu $\triangle OMN$:

$$\left. \begin{array}{l} OM \equiv OR \\ ON \equiv OS \\ \sphericalangle MON \equiv \sphericalangle SOR \end{array} \right\} \xrightarrow{L.U.L.} \triangle ORS \equiv \triangle OMN \Rightarrow MN \equiv RS$$

$$\sphericalangle OMN = \sphericalangle ORS \Rightarrow MN \parallel RS \text{ (1), în } \triangle OPQ: \left. \begin{array}{l} M - \text{mij. (OP)} \\ N - \text{mij. (OQ)} \end{array} \right\} \Rightarrow MN - \text{l. m.}$$

$$\Rightarrow MN \parallel PQ \text{ și } MN = \frac{PQ}{2} \text{ (2). Din (1) și (2) } \Rightarrow RS \parallel PQ \text{ și } RS = \frac{PQ}{2}$$

$$\Rightarrow RS - \text{l. m. în } \triangle DPQ \Rightarrow \left. \begin{array}{l} R - \text{mij. (DQ)} \\ S - \text{mij. (PD)} \end{array} \right\} \Rightarrow O - \text{c. g. } \triangle DPQ.$$



b) Fie $DO \cap PQ = \{T\}$

O – c. g. $\triangle DPQ \Rightarrow T$ – mij. (PQ) și $OT = x \Rightarrow OD = 2x$

$ABCD$ – par. $\Rightarrow \left. \begin{matrix} OB = OD = 2x \\ OT = x \end{matrix} \right\} \Rightarrow TB = x, \quad \left. \begin{matrix} OT = TB = x \\ TQ \equiv TP \end{matrix} \right\} \Rightarrow OPBQ$ – paralelogram

c) „ \Rightarrow ” $BP \equiv BQ \Rightarrow ABCD$ – romb

$\left. \begin{matrix} BP \equiv BQ \\ PBQO \text{ – par.} \end{matrix} \right\} \Rightarrow PBQO$ – romb $\Rightarrow BO \perp PQ \Rightarrow \sphericalangle OTQ = 90^\circ$

În $\triangle DPQ$: $\left. \begin{matrix} DT \text{ – mediană} \\ DT \text{ – înălțime} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \triangle DPQ$ – is. $\Rightarrow DP \equiv DQ \Rightarrow \sphericalangle DPT = \sphericalangle DQT$ (1).

Cum $BP \equiv BQ \Rightarrow \sphericalangle BPT = \sphericalangle OQT$ (2). Din (1) și (2) $\Rightarrow \sphericalangle APB = \sphericalangle CQB$ (3)

Comparăm $\triangle APB$ cu $\triangle CQB$:

$\left. \begin{matrix} PB = BQ \text{ (ip.)} \\ \sphericalangle APB \equiv \sphericalangle CQB \text{ (3)} \\ \sphericalangle BAP \equiv \sphericalangle BCQ} \end{matrix} \right\} \begin{matrix} \text{L.U.U.} \\ \Rightarrow \end{matrix} \triangle APB \equiv \triangle CQB \Rightarrow \left. \begin{matrix} AP \equiv CQ \\ DP \equiv DQ \end{matrix} \right\} \begin{matrix} \text{(3)} \\ \Rightarrow \end{matrix}$

$\left. \begin{matrix} DA \equiv DC \\ ABCD \text{ – par.} \end{matrix} \right\} \Rightarrow ABCD$ – romb.

„ \Leftarrow ” $ABCD$ – romb $\Rightarrow BP \equiv BQ$, $ABCD$ – romb $\Rightarrow (DO$ – bis. $\sphericalangle ABC \Leftrightarrow$

$\left. \begin{matrix} (DT \text{ – bis. } \sphericalangle PDQ) \\ T \text{ – mij. } (PQ) \end{matrix} \right\} \Rightarrow \triangle DPQ$ – isoscel $\Rightarrow DT \perp PQ \Leftrightarrow \left. \begin{matrix} OB \perp PQ \\ OQBP \text{ – par.} \end{matrix} \right\} \Rightarrow$

$OQBP$ – romb $\Rightarrow BP \equiv BQ$.